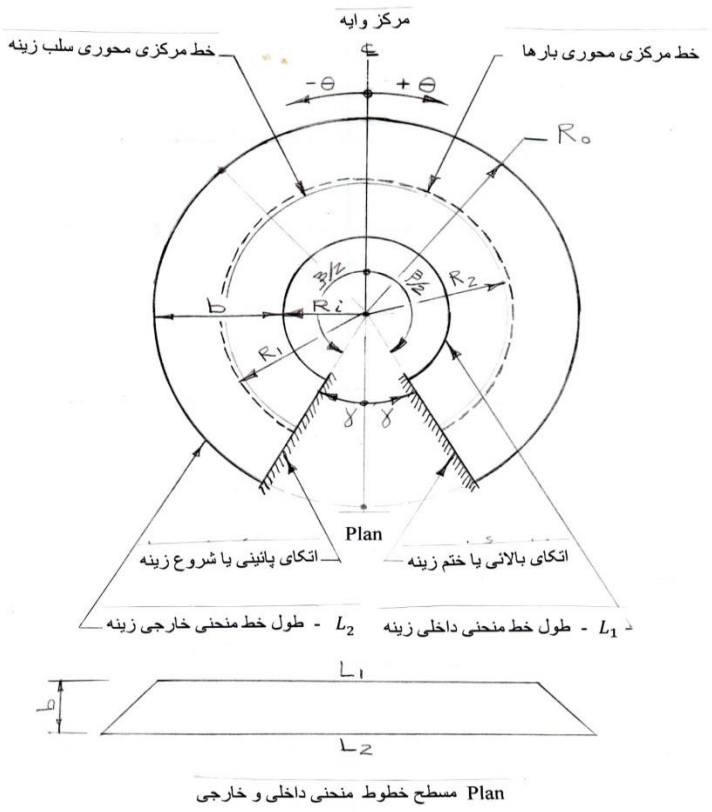
دیزاین زینهٔ کانکریتی مارپیچ به اساس متود V.A. Morgan (مورگن)

تحلیل مورگن بر اساس فرضیهٔ اتکای زینه مارپیچ دردو انجام بصورت ثابت یا (Fix) استوار است. از جمله 6 مشخصه مازاد دریافتی دروسط وایهٔ (span) زینه تنها 2 مشخصهٔ غیر صفری باقی می ماند که باید محاسبه شوند.

این دو مشخصه های اضافی عبارت اند از: قوه عرضانی شعاعی (H) و مومنت عمودی (M) که هردودرنقطهٔ مماس سطح زینه عمل مینمایند. همچنان فرضیه مورگن برآن استواراست که خط منحنی محوری مرکزی بارها موازی اما منطبق به خط منحنی محوری مرکز سلب (slab) زینه نمی باشد و بارها در هر مقطع زینه قسمی عمل میکنند که نقاط تاثیر آن ها درامتداد هیچ کدام از خط های منحنی محوری مرکزی واقع نمی شوند. بنا به این فرضیه ، مورگن این متودخود را به فورمول های ذیل خلاصه میسازد که برای هرمقطع با هر زاویهٔ دورانی Θ از وسطه وایه قابل استفاده می باشد:



مومنت عمودی M_v :

$$Mv = M\,cos\Theta + HR_2\,\Theta\tan\propto\sin\Theta - w\,R_1^2\,(1-\cos\Theta) \qquad (1)$$

مومنت عرضانی M_h :

$$M_h = M\sin\Theta\sin\propto - HR_2\,\Theta\,\tan\propto\cos\Theta\;sin\propto -$$

$$-HR_2\,\sin\Theta\cos\propto + (wR_1^2 sin\Theta - wR_1\,R_2\,\Theta)sin\propto \qquad (2)$$

قوه چرخش Torsion:

$$T = (M\sin\Theta - HR_2\,\Theta\tan\propto\cos\Theta + wR_1^2 sin\Theta + HR_2\,sin\Theta\;sin\propto - wR_1\,R_2\,\Theta)cos\propto +$$

$$HR_2\,sin\Theta\sin\propto \qquad (3)$$

قوه لغزش یا رانش Thrust:

$$N = -Hsin\Theta cos\propto - wR_1\,\Theta\sin\propto \qquad (4)$$

قوه عرضانی برشی Lateral Shear:

$$V = w\,\Theta cos\propto - HR_1\,\Theta\;sin\propto \qquad (5)$$

قوه برشی افقی دورانی Radial horizontal Shear :

$$F = Hcos\Theta \qquad (6)$$

شعاع خط مرکزی بارها توسط فورمول ذیل محاسبه میگردد:

$$R_1 = \frac{2}{3}\left[\frac{R_0^3 - R_i^3}{R_0^2 - R_i^2}\right] \qquad (7)$$

درفومول های فوق :

M = مومنت عمودی در وسط وایه

$$M = w\,R_1\,R_2\,\frac{\beta}{2} \qquad (8)$$

Θ = فاصله زاویهٔ دورانی از وسط وایه به رادیان

R_0 = شعاع خط منحنی خارجی سلب زینه

R_i = شعاع خط منحنی داخلی سلب زینه

R_1 = شعاع خط مرکزی محوری بارها

R_2 = شعاع خط مرکزی محوری سلب زینه

F = قوۀ برشی افقی دورانی

H = قوۀ برشی افقی (عرضانی) در وسط وایه

w = وزن مرده وزندۀ واحد طول وایه که به امتداد خط مرکزی سطح سلب اندازه میشود

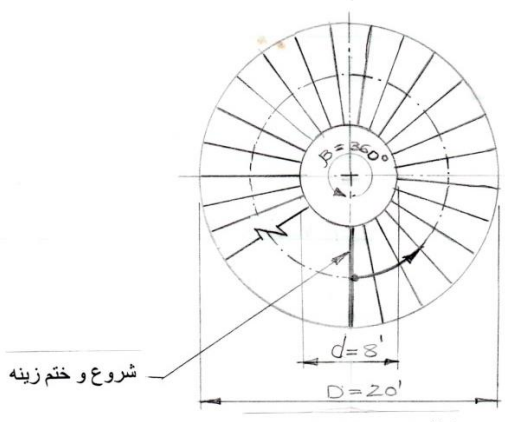
α = زاویۀ میلان سلب مارپیچ به شعاع R_2 در امتداد خط مرکزی

$\boldsymbol{\beta}$ = مجموع زاویۀ مرکزی افقی سلب زینه

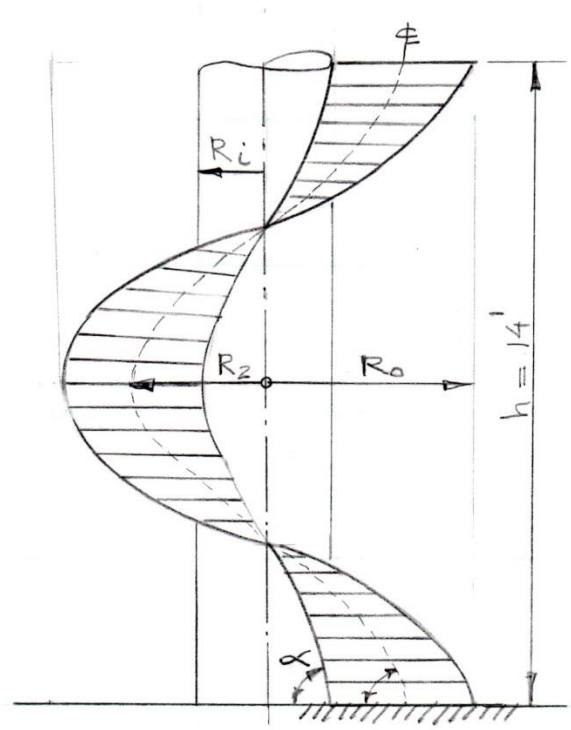
مثال دیزاین زینه کانکریتی مارپیچ

در اینجا زینۀ کانکریتی مارپیچی مد نظراست که دراتکا پائینی و بالائی خود ثابت یا(Fix) است. اندازه های داده شده مهندسی چنانچه در شکل نشان داده شده قرار ذیل اند:

شعاع داخلی R_i = 4 ft ، شعاع خارجی R_o = 10 ft ، عرض زینه b = 6 ft ، ارتفاع بین دو منزل h = 14 ft ، زوایه دورانی $2\Theta = 360^o$ ، عرض پته زینه (10 in) ، ارتفاع پته زینه (7.5 in). ضخامت سلب زینه(9 in)، و وزن زنده 100 lb/ft^2 (پوندفی فت مربع).



شکل 1 - Plan یا افتاده زینه



Elevation

در قدم اول باید طول خط منحنی داخلی و خارجی زینه را محاسبه کرد:

طول خط منحنی داخلی:

$$L_1 = \sqrt{(\pi d)^2 + (h)^2} = \sqrt{(3.14\ x\ 8)^2 + (14)^2}$$

$$L_1 = 28.7\ ft$$

طول خط منحنی خارجی:

$$L_2 = \sqrt{(\pi D)^2 + (h)^2} = \sqrt{(3.14\ x\ 20)^2 + (14)^2}$$

$$L_2 = 64.3\ ft$$

محاسبه وزن مرده سلب زینه:

$$\text{مساحت سلب} = \frac{1}{2}\ (L_1 + L_2) x\ b = \frac{1}{2}(28.7 + 64.3)\ x\ 6 = 279\ ft^2$$

فرض کنیم :

ضخامت سلب همراه با پته 9 in + 3 in = 12 in یا مساوی به یک فت باشد،

و وزن واحد کانکریت = 145 lb/ ft³ (۱۴۵ پوند در فت مکعب).

پس وزن مرده زینه:

Dead Load of Slab: 145 x 279 x 12/12 = 40455 lbs

تمام کاری اضافی زینه (پلستر ، سنگ کاری وغیره) = 25 lb/ft²

Dead Load of finishing: 25 x 279 = 6975 lbs

مجموع وزن مرده: DL = 40455 + 6975 = 47430 lbs

یا تقریبا 47.5 kips = 47500 lb (پوند).

محاسبه وزن زنده:

دریافت شعاع خط مرکزی بارها

$$R_1 = \frac{2}{3}\left[\frac{R_0^3 - R_i^3}{R_0^2 - R_i^2}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{10^3 - 4^3}{10^2 - 4^2}\right] = 7.45 \text{ ft}$$

$$\therefore \text{Live Load} = \pi\left(R_0^2 - R_i^2\right)x100 = 3.14(10^2 - 4^2) = 26376\ lbs \approx 26.5 \text{ kips}$$

وزن کلی زینه $W_t = 47.5 + 26.5 = 74\ kips$:

حالا وزن واحد طول وایه را به امتداد خط مرکزی سطح افقی سلب دریافت میکنیم:

$$W_t = w\ R_1\ \beta$$

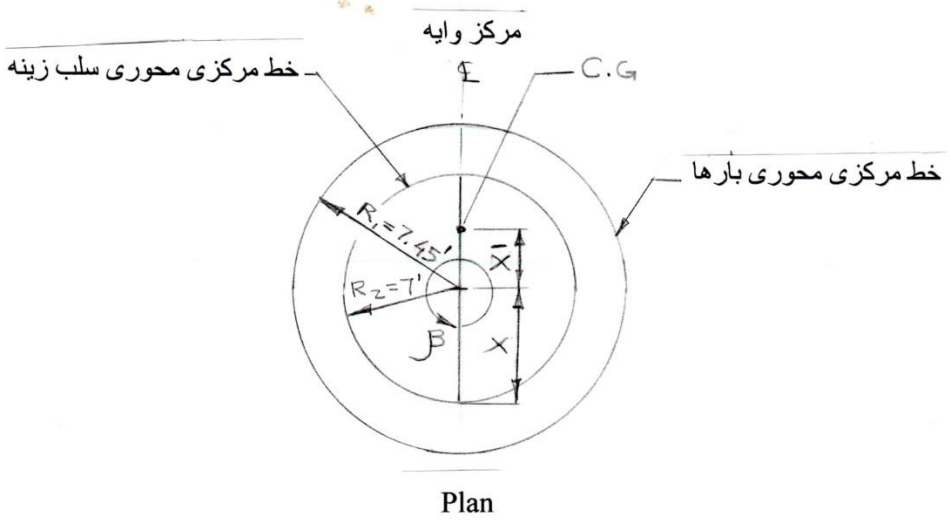
$$74 = w\ x\ 7.45\ x\ 360\ x\ \frac{2\pi}{360}$$

$$w = \frac{74}{7.45\ x\ 6.28} \approx 1.6\ \frac{kips}{ft}$$

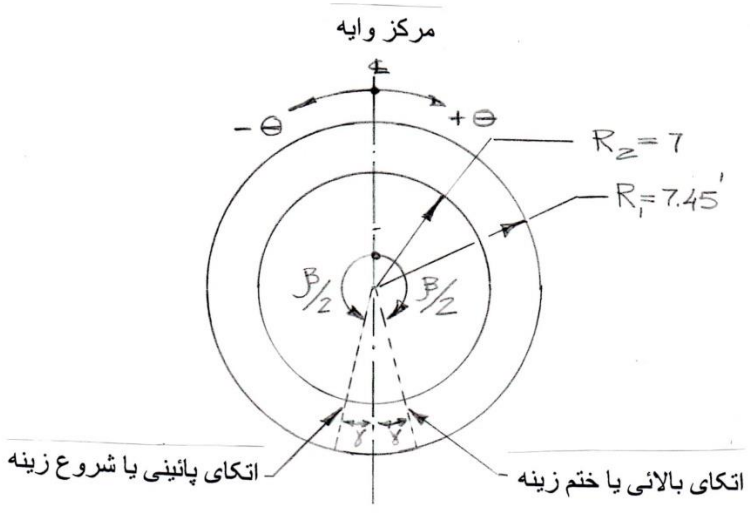
دریافت زاویه صعودی زینه:

$$\tan\alpha = \frac{h}{R_2\beta} = \frac{14}{7\ x\ 3.14\ x\ 2} = 0.3185 \qquad \therefore\ \alpha = 17.67^{\circ}$$

فاصله مرکزثقل بارها از مرکزسلب زینه:



Plan



Plan

$$\bar{x} = \frac{2R_1}{\beta}\ x\ sin\frac{\beta}{2} = \frac{2\ x\ 7.45}{2\pi}\ x\ \sin 180 = 0$$

اگر H قوه عرضانی در اتکا زینه باشد، پس:

$$H\ x\ h = W_t(\bar{x} + x\ )$$

$$H\ x\ 14 = 74\ (\ 0 + 7)\ , \qquad \therefore\ \ H = 37.0\ \ Kips$$

قوه عکس العمل در انجام بالائی مساوی است به :

$$\frac{W_t}{2} = \frac{74}{2} = 37.0\ \ Kips$$

مومنت عمودی در وسط وایه :

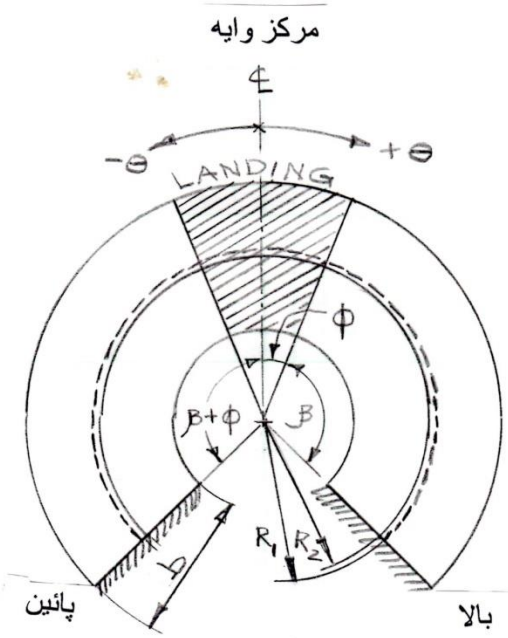
$$\mathrm{M}\ = \mathrm{w}\ R_{\ 1}\ R_2\ \frac{\beta}{2} = 1.6\ x\ 7.45\ x7\ x\ 180\ x\ \frac{\pi}{180} \cong 262\ kips\ \ ft$$

حالا که همه قیمت های لازم را برای به کار بردن فورمول های (1) تا (6) بدست آوردیم ، نتیجه تغیر تشنجات (Stress resultants) را برای قیمت های Mv ، M_h ، T ، N ، V و F درامتداد وایهٔ زینه مارپیچ با تغییر قیمت زوایه دورانی Θ از وسط وایه به طرف اتکاها پیدا کرده ومحاسبات خویش را برای دریافت مقدار سیخ بندی ادامه می دهیم.

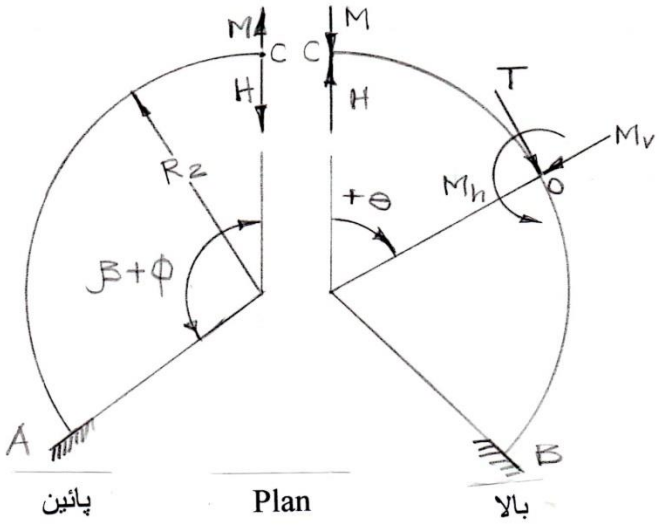
نوت:

1- پیشنهاد میگردد که در فورمول های (1) تا (6) زاویه دورانی Θ به اندازه هر 30^o تغیر داده شود چنانچه در گراف صفحهٔ 11 نشان داده شده است.
2- در این مثال به ادامه محاسبات سیخ بندی پرداخته نشده.

طرزالعمل دیزاین زینهٔ مارپیچ دارای پاگردان وسطی یا Landing



شکل 2 - Plan زینهٔ مارپیچ همراه با پا گردان یا Landing



شکل 3- کمیت های اضافی مومنت ، قوه عرضانی افقی ودیگرقیمت ها ی حاصله دروسط وایه

قدم اول : معلوم کردن شعاع مرکزی زینه:

$$R_2 = \frac{R_o + R_i}{2} \qquad (9)$$

قدم دوم : تعیین زاویه دربرگیرنده پا گردان زینه یا (Landing) ، ($2\ \emptyset$) با طول L به فاصله R_o از مرکز:

$$L = 2\ \emptyset\ R_0 \qquad (10)$$

قدم سوم : دریافت مجموع زاویه مرکزی پا گردان θ_r از کمیت های داده شده 2β و $2\emptyset$

$$2\beta = \theta_r + 2\emptyset \qquad \therefore \qquad \theta_r = 2\beta - 2\emptyset \qquad (11)$$

قدم چهارم: دریافت میلان زینه به امتداد خط مرکزی مارپیچ با شعاع مرکزی به اساس ارتفاع داده شده زینه (h) ، شعاع خط مرکزی R_2 و مجموع زاویه 2β :

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{h}{R_2\ 2\beta} \qquad (12)$$

قدم پنجم : دریافت شعاع خط محوری مرکزی بارها:

$$R_1 = \frac{2}{3}\left[\frac{R_0^3 - R_i^3}{R_0^2 - R_i^2}\right] \qquad (13)$$

قدم ششم: دریافت بارمجموعی در واحد طول به امتداد خط مرکزی.

قدم هفتم : با در نظرداشت قیمت تناسب $\frac{R_1}{R_2}$ و زاویه مرکزی پاگردان (Landing) ($2\emptyset$) به گراف های رنالد (Reynold's Charts) مراجعه گردد تا قیمت های ضریب های k_1 ، k_2 و k_3 دریافت شده و بعد محاسبات برای دریافت مومنت وسط وایه ، قوه عرضانی افقی دورانی و مومنت دراتکاها به ترتیب ذیل دریافت گردد:

$$M = K_1\ w\ R_2^2 \qquad (14)$$

$$H = K_2\ w\ R_2 \qquad (15)$$

$$M_{sup} = K_3\ wR_2^2 \qquad (16)$$

قدم هشتم: تشنجات را در فاصله های مختلف زاویه دورانی Θ از وسط وایه به طرف اتکاها با استفاده ازمعادلات (1) تا (6) میتوان دریافت نمود. باید درنظر داشت که زاویه میلان سلب مارپیچ در موقیعت پاگردان (Landing) $\propto = 0$ می باشد.

حالا کاربرد قدم های فوق را در یک مثال نشان میدهم:

مثال زینه مارپیچ همراه با پاگردان (Landing)

در این مثال داده شده ها قرار ذیل است:

ارتفاع h =12.5 ft، شعاع داخلی R_0= 5 ft ، شعاع خارجی R_i = 11.25 ft ، چرخش زینه 2β = 270°، طول لندنگ یا پا گردان L = 5.25 ft ، وزن زنده = LL = 100 psf ، وزن واحد کانکریت γ = 150 pcf ، ضخامت سلب زینه t = 6 in ، و ارتفاع پته 6 in.

قدم اول : $R_2 = \frac{R_o + R_i}{2} = \frac{5+11.5}{2} = 8.125\ ft$

قدم دوم : $\emptyset = \frac{L}{2R_0} = \frac{5.25}{2\ x\ 5} = 0.525\ radian = 30°$

قدم سوم : $\theta_r = 2\beta - 2\emptyset = 270 - 2\ x30 = 210° = 3.665\ radian$

قدم چهارم : $\boldsymbol{\alpha}= \tan^{-1}\frac{h}{R_2\ 2\beta} = \tan^{-1}\frac{12.5}{8.125\ x\ 3.665} = 22.8°$

قدم پنجم : $R_1 = \frac{2}{3}\left[\frac{R_0^3 - R_i^3}{R_0^2 - R_i^2}\right] = \frac{2}{3}\left(\frac{11.25^3 - 5^3}{11.25^2 - 5^2}\right) = 8.526\ ft$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{8.526}{8.125} = 1.05$$

قدم ششم : مجموع ضخامت درامتدادعمودی تقریباً 6 in + 3.5 in = 9.5 in. است. پس وزن مجمعی مرده و زنده قرار ذیل است:

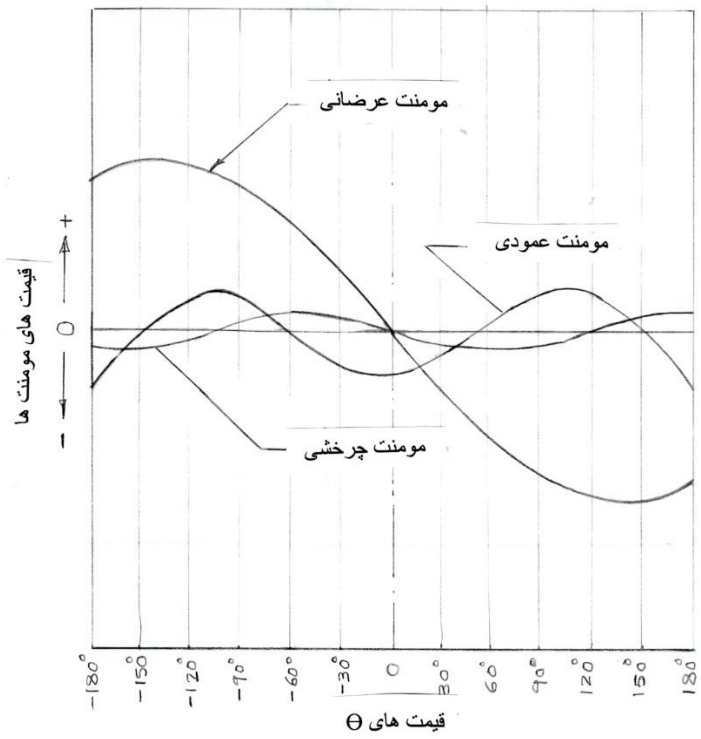
$$DL + LL = \frac{9.5}{12}\ x\ 150 + 100 = 218.75\ psf, \qquad \gamma = 150\ \text{pcf}$$

$$\therefore \qquad w = 218.75\ (\ 11.25 - 5) = 1367\ p\ lf$$

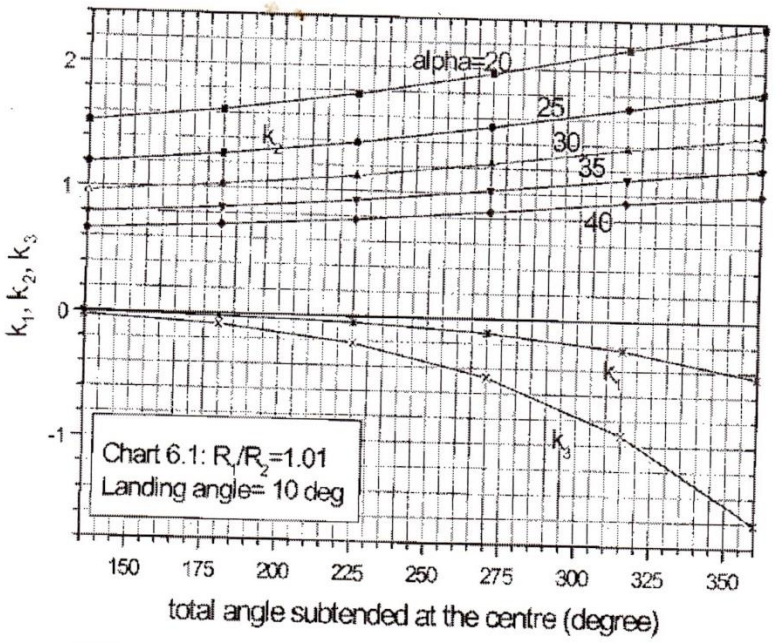
قدم هفتم : با استفاده از قیمت ها در یافت شده $\frac{R_1}{R_2}$ ، $\boldsymbol{\alpha}$ و $\emptyset$ ، برای زینهٔ با زاویه $270°$ با مراجعه به گراف های رونالد قیمت های K_1 ، K_2 ، K_3 را دریافت نموده و با استفاده از معادلات 14، 15 و 16 محاسبات ادامه می یابد:

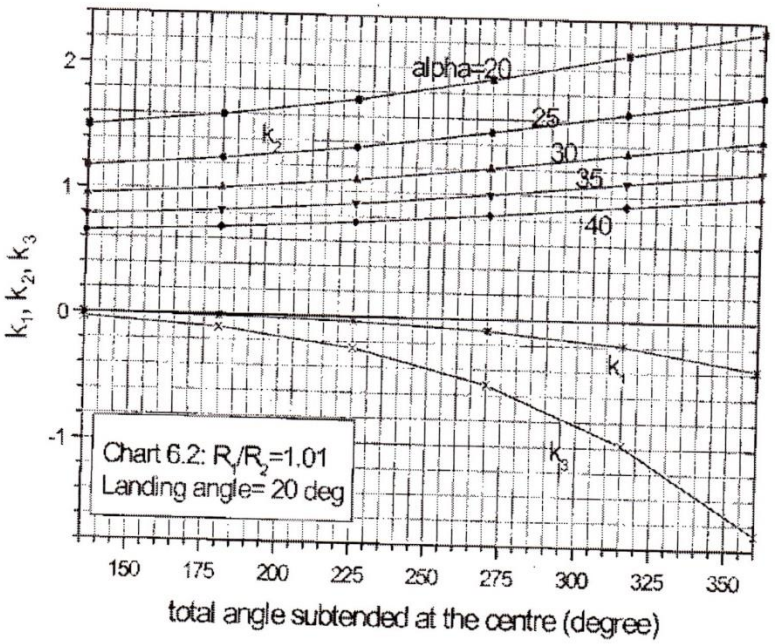
$$k_1 = 0.036\,,\ M = K_1\ w\ R_2^2 = 0.036\ x\ 1367\ x\ 8.125^2 = 3250\ lb - ft$$
$$k_2 = 1.657,\ H = K_2\ w\ R_2 = 1.657\ x\ 1367\ x\ 8.125\ = 18400\ lb - ft$$
$$k_3 = -0.73\,,\ M_{sup} = K_3\ w\ R_2^2 = 0.036\ x\ 1367\ x\ 8.125^2 = 65880\ lb - ft$$

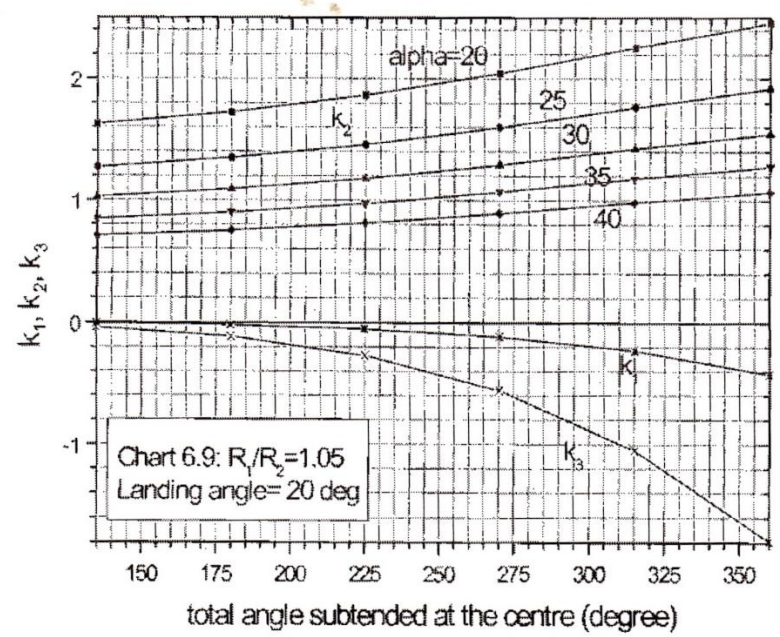
قدم هشتم: بازهم تشنجات (Stress resultants) را برای قیمت های Mv ، M_h ، T ، N ، V و F درامتداد وایه زینه مارپیچ با تغییر قیمت زوایه دورانی Θ از وسط وایه به طرف اتکاها پیدا کرده می توانیم و بعد میتوان به محاسبات برای دریافت مقدار سیخ ادامه داد.

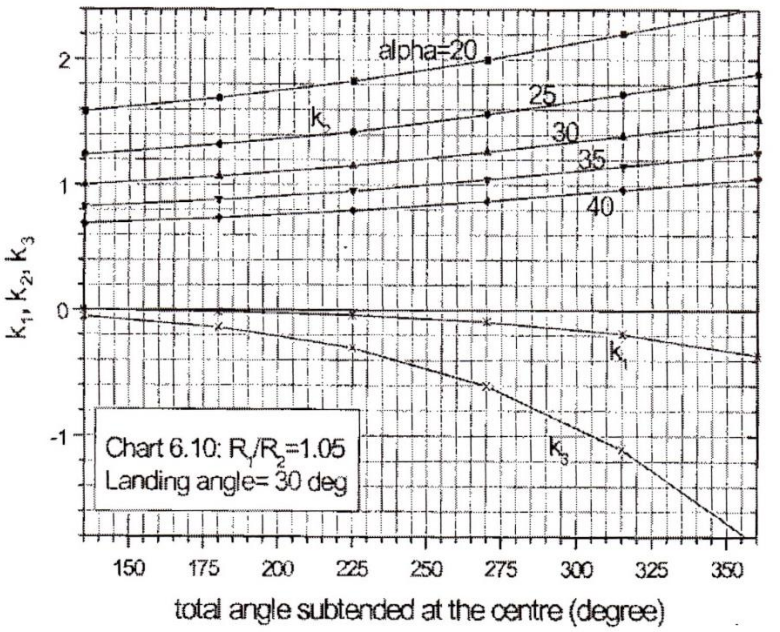


شکل 4 – مثال رابطه قیمت های مومنت ها، قوه عرضانی افقی ودیگرقیمت ها ی حاصله شعاعی با زاویه دورانی.


alpha=20
25
30
35
40
k_2
k_1
k_3
k_1, k_2, k_3
Chart 6.1: R_1/R_2=1.01
Landing angle= 10 deg
2
1
0
-1
150
175
200
225
250
275
300
325
350
total angle subtended at the centre (degree)


alpha=20
25
30
35
40
k_2
k_1
k_3
k_1, k_2, k_3
Chart 6.2: R_1/R_2=1.01
Landing angle= 20 deg
2
1
0
-1
150
175
200
225
250
275
300
325
350
total angle subtended at the centre (degree)





1. V. A Morgan (1960) Helical Stair Analysis منابع:
2. A.C. Scordelis's Approach (1960)
3. A.S. Arya and Anand Parkash's Approach (1973)
4. Reynold's Charts.